

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$$

Tamén poderíamos calcular A^{-1} utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e vemos que } \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$$

Tamén se podería calcular A^{-1} utilizando determinantes:

$$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

b)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

$$\text{Polo tanto: } |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0.$$

$\lambda = -1$ é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Se } \lambda = -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 2 \\ \text{Se } \lambda \neq -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 3 \end{aligned}}$$

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e vimos que } A + I \text{ non ten inversa. Entón:}$$

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e con $f(a) = f(b)$ entón existe polo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b + c \\ f(1) = b + c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1 \\ 2 + a = b + c \end{array}$$
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para que coincidan as derivadas laterais} \\ 4 + a = b \end{array}$$

$$f(0) = f(2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2b + c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = -2 \\ a - b = -4 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -2; b = 1; a = -3}$$

Para estes valores, $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{Entón } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$$

b) Estudo da parábola:

$$y = x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0) \text{ e } (2,0)$$

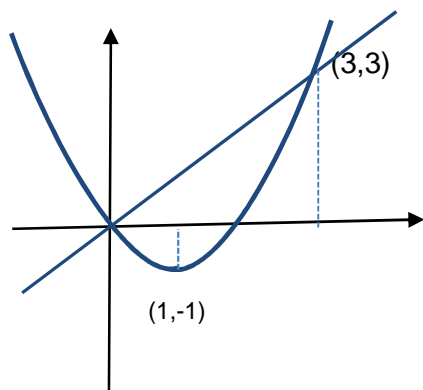
$$y' = 2x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Vértice: } (1, -1).$$

$$y'' = 2 \Rightarrow \text{Convexa.}$$

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3. \text{ Córtanse nos puntos } (0,0) \text{ e } (3,3)$$

$y = x^2$ $y = x$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$
$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta r :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

Como se pide un plano π_1 perpendicular á recta, entón \vec{v}_r é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e π_1 queda determinado polo punto $A(1,1,1)$ polo que pasa e o vector normal $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, -2)$

$$\pi_1: 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: x - z = 0}$$

b) Este novo plano, π_2 , queda determinado polos elementos:

- $P(-1, 0, 6)$ que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, -2)$ é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2, 0, -2)$ é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2: x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídenos calcular a distancia da recta r ao plano π_2 . Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$P_r(1, 0, 1) \in r$$
$$d(r, \pi_2) = d(P_r, \pi_2) = \frac{|1 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(r, \pi_2) = \sqrt{3} \text{ u}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Sexa X = “nº de extraccións nas que obtemos un 7”

- a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de extraccións} = n = 5 \\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0,1 \end{array} \right\} X \rightarrow Bi(5; 0,1)$$

$$P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,5905 + 0,3281 = 0,9185$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0,9185}$$

- b) Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1)$$

Pero como

$$n \cdot p = 10 > 5$$

$$n \cdot q = 90 > 5$$

aproximamos a binomial X pola normal X' con media $\mu = n \times p = 100 \times 0,1 = 10$ e desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1) ; \quad X' \rightarrow N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & & Z = \frac{X' - 10}{3} \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X < 9) = P(X' \leq 8,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} \leq \frac{8,5 - 10}{3}\right) & = & P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) \\ & = & 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{array}$$

$$\boxed{P(X < 9) = 0,3085}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Dúas columnas proporcionais

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

Sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } m \neq 1 \\ 2 & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 1$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 1$, $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) Para $m = 1$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solución son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ (L'Hopital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2mx}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2x + 2m}{2x\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{-4 + 2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4 + 2m}{2} = 3 \Rightarrow -4 + 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

b)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Punto de inflexión no punto } (0,5): \begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ f(0) = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5} \end{cases}$$

Entón $f(x) = ax^3 + cx + 5$. Ademais

$$\text{Pasa polo punto } (1,1): f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$$\text{Tanxente á gráfica de } f(x) \text{ no punto } (1,1) \text{ paralela ao eixe } X: f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3a \\ a - 3a + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}; \boxed{c = -6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de substitución e despois o método de integración por partes:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt && \text{desfacemos o cambio} \\ \int \sqrt{x} \ln x dx &= \int 4t^2 \ln t dt = \frac{4}{3} t^3 \ln t - \frac{4}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \Rightarrow du = dt/t \\ dv = 4t^2 \Rightarrow v = \frac{4}{3} t^3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \right]_1^e = \frac{2}{3} e^{3/2} - \frac{4}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a)

$$r: \begin{cases} P_r(9,4,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8, -3, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(1,0,5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Os vectores directores $\vec{v}_r = (-8, -3, 0)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1)$ das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango($\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s$):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas córtanse}}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{cases} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Punto de corte } (9,4,1)}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por (\vec{v}_r e \vec{v}_s non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas (9,4,1) (π contén a r e a s)
- Un vector director \vec{v}_r da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)
- Un vector director \vec{v}_s da recta s é un vector contido no plano (π contén á recta s)

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

$$\overrightarrow{OP_s} = (1,0,5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 11, 1)$$

$$d(O, s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

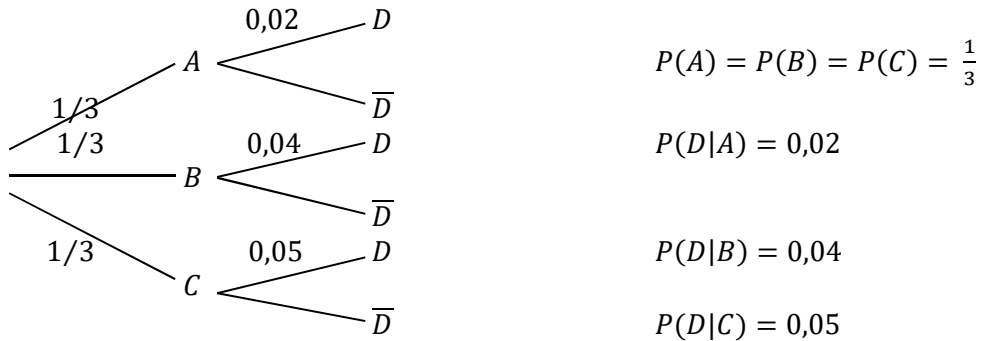
$$\boxed{d(O, s) = \frac{7\sqrt{2}}{2} u}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 4:

Podemos fazer o seguinte diagrama em árvore (D =peza defectuosa):



a) Pela fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,02 \cdot \frac{1}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0,11 \cdot \frac{1}{3} = 0,03667 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,03667}$$

b)

$$P(A|\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0,02) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,03667} = 0,3391$$

$$\boxed{P(A|\bar{D}) = 0,3391}$$